UNIVERSIDADE ESTADUAL DE SANTA CRUZ
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS-DCET
COLEGIADO DE MATEMÁTICA

Marcos dos Santos Ferreira

O Teorema do Ponto Fixo de Banach e Aplicações

Ilhéus - BA

2008

Marcos dos Santos Ferreira

O Teorema do Ponto Fixo de Banach e Aplicações

Monografia submetida ao Colegiado do Curso de Matemática da Universidade Estadual de Santa Cruz como requisito parcial para obtenção do grau de Bacharel em Matemática.

Orientador: Prof. Ms Cícero Alfredo da Silva Filho

Ilhéus-Bahia

2008

Marcos dos Santos Ferreira

O Teorema do Ponto Fixo de Banach e Aplicações

Profa. Ms Aline Gobbi Dutra

Profa. Ms Fernanda Gonçalves de Paula

Prof. Ms Cícero Alfredo da Silva Filho

Orientador

À minha mãe, esposa e filho.

Agradecimentos

Agradeço à Deus, por ter permitido que eu chegasse onde cheguei. Por ter me proporcionado todos os momentos que vivi durante esses quatro anos. Por não ter me deixado desistir. Enfim, por tudo.

Agradeço à minha família. Esta, sem dúvida, teve um papel fundamental para que eu chegasse até o final de minha graduação e, consequentemente, para que eu terminasse este trabalho. Especificamente, aos meus pais, pela boa educação, pelo incentivo aos estudos, pela compreensão em minhas escolhas e decisões, pelo apoio financeiro, moral e emocional. Muitos são os motivos pelos agradecimentos. Aos meus irmãos e sobrinhos que, apesar de não entenderem os meus problemas, se preocupavam comigo e tentavam, de alguma forma, compensar minhas tristezas. Em suma, tudo que tentei e conseguir fazer, foi visando dar orgulho e, de certa forma, um futuro mais confortável para as pessoas que eu amo, especialmente a Thelma, Ludimila e Nícolas.

À todos os professores que tive oportunidade de conhecer. Pessoas que, de forma direta ou indireta, contribuíram para a minha formação acadêmica. Em especial, à Marcos Rogério, Erinalva Calasans, Alejandro Dimarco e Cícero Alfredo. Este último, principalmente, pelo incentivo e apoio dados, para que eu pudesse fazer uma graduação de qualidade.

Aos meus colegas e amigos. Pessoas que convivi, durante esses anos. Boas

pessoas, que juntos compartilhamos bons e maus momentos de nossas vidas.

Resumo

Neste trabalho estudamos o Teorema do Ponto Fixo de Banach e algumas de suas aplicações. Este teorema garante existência e unicidade de solução para variados tipos de equações e nos fornece um método iterativo para encontrar a solução numérica. Particularmente, aplicamos o Teorema do Ponto Fixo de Banach em Equações Numéricas, Equações Lineares, Equações Diferenciais Ordinárias (Teorema de Picard) e em Equações Integrais (Equações de Fredholm e Volterra).

Palavras-chave: Ponto Fixo, Contração, Teorema do Ponto Fixo de Banach.

Abstract

In this work we studied the Banach Fixed Point Theorem and some of its applications. This theorem guarantees existence and unicity of solution to many kinds of equations and give us an iterative method to find such numeric solution. Particularly, we'll apply the Banach Fixed Point Theorem in Numerical Equations, Linear Equations, Ordinary Differential Equations (Picard's Theorem) in Integral Equations (Fredholm and Volterra Equations).

Keywords: Fixed Point, Contraction, Banach Fixed Point Theorem.

Sumário

Introdução

A Análise Funcional é um ramo da Análise Matemática que trata do estudo de espaço de funções. Tem suas raízes históricas no estudo de transformações tais como Transformações de Fourier e Equações Integrais. Um grande impulso para o avanço da Análise Funcional durante o século XX foi a modelagem, devida a John Von Neumann (1903-1957), da mecânica quântica em espaços de Hilbert. A Análise Funcional faz uso de muitos conceitos de Álgebra Linear e pode ser considerada como o estudo de Espaços Vetoriais Normados (Espaço de Banach) de dimensão infinita. Dentre os personagens centrais da Análise Funcional, destacam-se Stefan Banach (1892-1945) e Hugo Dyonizy Steinhaus (1887-1972).

Entre os vários trabalhos de Stefan Banach, destacam-se a sua contribuição para a teoria das séries ortogonais e inovações na teoria de medida e integração. Dos trabalhos publicados por Banach, o Théorie des opérations linéaires (1932) é o mais importante. Outro trabalho considerado de grande importância na época, o Théorie de Sept Reverse (1934) acabou sendo considerado incompleto na década seguinte. Na tentativa de generalizar equações integrais Banach introduziu o conceito de Espaços Vetoriais Normados, além de provar vários teoremas dessa área. Dentre os teoremas que recebem o nome de Banach, os mais conhecidos são: Teorema de Hahn-Banach, Teorema de Banach-Steinhaus, Teorema de Banach-Alaoglu, Teorema de Banach-Schauder e Teorema do Ponto Fixo de Banach.

O Teorema do Ponto Fixo de Banach (T.P.F.B), válido em espaços métricos completos, garante a existência e unicidade de ponto fixo para determinados tipos de equações. Suas aplicações se estendem aos domínios das equações integrais, equações diferenciais, equações numéricas em C, da análise numérica e de outros ramos da matemática pura e aplicada.

Neste trabalho, demonstramos o (T.P.F.B) e duas versões fracas, tal como o Teorema (2.3.1). Este teorema tem sua importância, pois garante os mesmos resultados, apesar de ter a hipótese de contratividade enfraquecida.

Para entendermos a demonstração do (T.P.F.B), bem como suas aplicações, fizemos um estudo acerca de espaços métricos, convergência em espaços métricos, espaços métricos completos, ponto fixo e contração.

Por fim, aplicamos o (T.P.F.B) na solução de Equações Numéricas, Lineares (Sistemas Lineares), Diferenciais (Teorema de Picard's) e Integrais de Fredholm e Volterra.

Na seção Resultados Utilizados, apresentamos alguns resultados que utilizamos em nosso trabalho, dos quais não fizemos suas demonstrações.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo iremos abordar alguns conceitos acerca de espaços métricos, sequências em espaços métricos, sequências de Cauchy, espaços métricos completos, ponto fixo e contração. Tais conceitos são imprescindíveis para o entendimento da demontração do (T.P.F.B.), bem como de suas versões e aplicações que trataremos nos próximos capítulos.

1.1 Espaços Métricos

Definição 1.1.1 (Espaço Métrico) *Um espaço métrico é um par* (X, d)*,*
onde X *é um conjunto não vazio e:*

$$\begin{aligned} d : X \times X &\to R \\ (x, y) &\longmapsto d(x, y) \end{aligned}$$

é uma função que satisfaz, $\forall x, y, z \in X$*:*

(M1) $d(x, x) = 0$.

(M2) Se $x \neq y$*, então* $d(x, y) > 0$.

(M3) $d(x, y) = d(y, x)$.

(M4) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

Nessas condições, dizemos que d é uma métrica sobre X.

Exemplo 1.1.1 (Métrica Usual da Reta) *Sejam* $X = R$ *e* $d : R \times R \to R$ *tal que* $d(x,y) = |x-y|$, $\forall x, y \in R$. *Desta forma, d é uma métrica sobre* R.

<u>Demonstração:</u>

Sejam $x, y, z \in R$.

(M1) $d(x,x) = |x-x| = |0| = 0$.

(M2) Se $x \neq y$, então $d(x,y) > 0$. De fato,

$$x \neq y \Rightarrow x - y \neq 0 \Rightarrow |x-y| > 0$$

Logo, $d(x,y) = |x-y| > 0$.

(M3) $d(x,y) = d(y,x), \ \forall x, y \in R$. Com efeito,

$$d(x,y) = |x-y| = |-(x-y)| = |y-x| = d(y,x).$$

Assim, d(x,y)=d(y,x).

(M4) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,x) \Leftrightarrow |x-z| \leq |x-y| + |y-z|$. De fato,

$$|x-z| = |(x-y)+(y-z)| \leq |x-y| + |y-z|$$
$$\Rightarrow |x-z| \leq |x-y| + |y-z|.$$

■

Exemplo 1.1.2 (Métricas em R^n) *Consideremos* $R^n = \{x;\ x = (x_1, \cdots, x_n),\ com\ x_i \in R\}$ *e* d, d_S *e* $d_M : R^n \times R^n \to R$ *definidas abaixo:*

- $d(x, y) := \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$. (métrica euclidiana)

- $d_S(x, y) := |x_1 - y_1| + \cdots |x_n - y_n|$. (métrica da soma)

- $d_M(x, y) := \max\{|x_1 - y_1|, \cdots, |x_n - y_n|\}$. (métrica do máximo)

Nestas condições, d, d_S e d_M são métricas em R^n.

<u>DEMONSTRAÇÃO:</u>

Sejam $x, y, z \in R^n$.

(M1) $d(x, x) = \sqrt{(x_1 - x_1)^2 + \cdots + (x_n - x_n)^2} = \sqrt{0^2 + \cdots + 0^2} = \sqrt{0} = 0$.

(M2) Se $x \neq y$, então $d(x, y) > 0$. De fato,

$$x \neq y \Rightarrow x_i \neq y_i, \text{ para algum } i \in \{1, 2, \cdots, n\}.$$

Assim, $x_i - y_i \neq 0$, o que resulta em $(x_i - y_i)^2 > 0$.

Portanto, $d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} \geq \sqrt{(x_i - y_i)^2} > 0$. Logo, $d(x, y) > 0$.

(M3) $d(x, y) = d(y, x)$. Sabemos que $(x_i - y_i)^2 = (y_i - x_i)^2$, $\forall i \in \{1, 2, \cdots, n\}$. Assim,

$$\begin{gathered}
(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2 = (y_1 - x_1)^2 + \cdots + (y_n - y_n)^2 \\
\Rightarrow \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \cdots + (y_n - y_n)^2} \\
\Rightarrow d(x, y) = d(y, x)
\end{gathered}$$

(M4) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, x)$. Usaremos a desigualdade de Cauchy-Schwarz em R^n, a saber, $\forall a, b \in R^n$,

$$|a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n| \leq \left(\sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}\right)\left(\sqrt{b_1^2 + \cdots + b_n^2}\right).$$

Temos que

$$\begin{aligned}
[d(x,z)]^2 &= \sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}[(x_i - y_i) + (y_i - z_i)]^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}[(x_i - y_i)^2 + 2(x_i - y_i)(y_i - z_i) + (y_i - z_i)^2] \\
&= \sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2 + 2\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)(y_i - z_i) + \sum_{i=1}^{n}(y_i - z_i)^2 \\
&= [d(x,y)]^2 + 2\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)(y_i - z_i) + [d(y,z)]^2 \\
&\leq [d(x,y)]^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - z_i)^2} + [d(y,z)]^2 \\
&= [d(x,y)]^2 + 2[d(x,y)][d(y,z)] + [d(y,z)]^2 \\
&= [d(x,y) + d(y,z)]^2.
\end{aligned}$$

Desta forma, $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

■

Exemplo 1.1.3 (Métrica no Espaço de Funções) *Definimos a métrica no espaço de funções* $C[a,b] = \{x : [a,b] \to R;\ x$ *é contínua*$\}$ *por:*

$$d(x,y) = \max_{t \in [a,b]} |x(t) - y(t)|\,.$$

<u>DEMONSTRAÇÃO:</u>

Primeiramente, temos, pelo Teorema de Weierstrass (ver Resultados Utilizados), que d está bem definida.

(M1) $d(x,x) = 0,\ \forall x \in C[a,b]$. De fato,

$$d(x,x) = \max_{t \in [a,b]} |x(t) - x(t)| = \max\{0\} = 0$$

(M2) $x \neq y \Rightarrow d(x,y) > 0,\ \forall x, y \in C[a,b]$.

$$x \neq y \Rightarrow \exists\ t_0;\ x(t_0) \neq y(t_0).$$

Assim,

$$0 < |x(t_0) - y(t_0)| \leq \max_{t \in [a,b]} |x(t) - y(t)| = d(x, y)$$

Desta forma, $d(x, y) > 0$.

(M3) $d(x, y) = d(y, x), \ \forall \ x, y \in C[a, b]$.

Sabemos que, $|x(t) - y(t)| = |y(t) - x(t)| \, , \ \forall \ t \in [a, b]$. Logo,

$$d(x, y) = \max_{t \in [a,b]} |x(t) - y(t)| = \max_{t \in [a,b]} |y(t) - x(t)| = d(y, x)$$

(M4) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z), \ \forall \ x, y, z \in C[a, b]$. Ou seja, devemos ter:

$$\max_{t \in [a,b]} |x(t) - z(t)| \leq \max_{t \in [a,b]} |x(t) - y(t)| + \max_{t \in [a,b]} |y(t) - z(t)|.$$

Desta forma, basta mostrarmos que:

$$|x(t) - z(t)| \leq \max_{t \in [a,b]} |x(t) - y(t)| + \max_{t \in [a,b]} |y(t) - z(t)| \, , \ \forall t \in [a, b].$$

Temos que,

$$|x(t) - y(t)| \leq \max_{t \in [a,b]} |x(t) - y(t)| \, , \ \forall t \in [a, b]$$
$$|y(t) - z(t)| \leq \max_{t \in [a,b]} |y(t) - z(t)| \, , \ \forall t \in [a, b].$$

Somando estas duas desigualdades, obtemos,

$$\begin{aligned} |x(t) - z(t)| &= |(x(t) - y(t)) + (y(t) - z(t))| \\ &\leq |x(t) - y(t)| + |y(t) - z(t)| \\ &\leq \max_{t \in [a,b]} |x(t) - y(t)| + \max_{t \in [a,b]} |y(t) - z(t)|. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$|x(t) - z(t)| \leq \max_{t \in [a,b]} |x(t) - y(t)| + \max_{t \in [a,b]} |y(t) - z(t)| \ \ \forall t \in [a, b].$$

$\blacksquare$

Definição 1.1.2 (Métricas Equivalentes) *Duas métricas* d_1 *e* d_2 *em um espaço métrico* X *são equivalentes*[1] *quando, existem constantes* $\alpha > 0$ *e* $\beta > 0$ *tais que:*

$$\alpha d_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq \beta d_1 d(x,y), \ \forall \ x, y \ \in M.$$

Definição 1.1.3 (Bolas e Esferas) *Sejam (X,d) um espaço métrico,* $x_0 \in X$ *e* $r > 0$*. Definimos:*

- $B(x_0, r) = \{x \in X; \ d(x, x_0) < r\}$ (Bola aberta de centro x_0 e raio r)
- $B[x_0, r] = \{x \in X; \ d(x, x_0) \leq r\}$ (Bola fechada de centro x_0 e raio r)
- $S(x_0, r) = \{x \in X; \ d(x, x_0) = r\}$ (Esfera)

Exemplo 1.1.4 (Bolas na Reta) *Consideremos* $X = R$ *e* $d(x,y) = |x - y|$*. Para* $a \in R$ *e* $r > 0$*, temos:*

$$B(a, r) = \{x \in R; \ d(x, a) = |x - a| < r\}$$
$$|x - a| < r \Leftrightarrow a - r < x < a + r \Leftrightarrow x \in (a - r, a + r)$$

Daí,

$$B(a, r) = \{x \in R; \ a - r < x < a + r\} = (a - r, a + r)$$

$$\Rightarrow B(a, r) = (a - r, a + r)$$

Analogamente, vemos que,

$B[a, r] = [a - r, a + r]$.

$S(a, r) = \{a - r, a + r\}$.

[1]As métricas euclidiana, da soma e do máximo são equivalentes em R^n. Veja LIMA, Elon Lages. *Espaços Métricos.* IMPA, 2007, pg 3.

1.2 Convergência em Espaços Métricos

Definição 1.2.1 (Convergência de Sequências) *Uma sequência* (x_n) *em um espaço* $X = (X, d)$ *é dita convergente se existir* $x \in X$ *tal que:*

$$\lim_{n \to \infty} d(x_n, x) = 0.$$

Neste caso, x *é chamado o limite de* (x_n)*, e escrevemos:*

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x \quad ou \quad x_n \to x.$$

Quando necessário, usaremos a notação $x_n \xrightarrow{d} x$ *para indicar que a convergência é com relação à métrica* d*.*
Em outras palavras, $x_n \to x$ *se,*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists n_0,\ tal\ que\ \forall\ n > n_0,\ tem - se\ d(x_n, x) < \epsilon.$$

Observação 1.2.1 (Convergência) *Tratando-se de bolas,* $x_n \to x$ *se, para toda bola de centro* x *e raio* ϵ*, existir* n_0 *suficientemente grande, de modo que:* $x_n \in B(x, \epsilon),\ \forall n > n_0.$

Exemplo 1.2.1 (Convergência de Sequência de Números Reais) *Consideremos* R *dotado da métrica usual. A sequência* $x_n = \frac{n}{n+1}$ *converge para o ponto 1.*

<ins>Demonstração:</ins>

De fato, dado $\epsilon > 0$, tomemos n_0 de modo que $\frac{1}{n_0+1} < \epsilon$. Desta maneira, $\forall\ n \geq n_0$, temos:

$$\begin{aligned} d(x_n, 1) &= \left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| \\ &= \left| \frac{-1}{n+1} \right| \\ &= \frac{1}{n+1} \\ &\leq \frac{1}{n_0+1} \\ &< \epsilon, \end{aligned}$$

e assim, $x_n \to 1$.

$\blacksquare$

Exemplo 1.2.2 (Convergência de Sequências de Funções) *Considere o espaço C[0,1] com a métrica:*

$$d(f,g) = \max_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)|,$$

onde $(f_n) \subset C[0,1]$ *é tal que* $f_n(x) = \frac{x}{n}$ *e* $f(x) = 0$, $\forall x \in [0,1]$. *Nessas condições, temos que* $f_n \to f$.

DEMONSTRAÇÃO:

De fato,

$$\begin{aligned} d(f_n, f) &= \max_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| \\ &= \max_{x \in [0,1]} \left| \frac{x}{n} - 0 \right| \\ &= \max_{x \in [0,1]} \left| \frac{x}{n} \right| \\ &= \tfrac{1}{n}, \end{aligned}$$

isto é, $d(f_n, f) = \frac{1}{n}$.

Assim, $\forall \epsilon > 0$, tomando $n_0 > 1/\epsilon$ e $n > n_0$, temos:

$$d(f_n, f) = 1/n < \epsilon.$$

$$\Rightarrow d(f_n, f) < \epsilon, \ \forall \ n > n_0.$$

Logo, $f_n \to f$.

$\blacksquare$

Lema 1.2.1 (Convergência) *Seja* (X, d) *um espaço métrico. Então:*

1. *Uma sequência convergente em X é limitada e seu limite é único.*

2. Se $x_n \to x$ e $y_n \to y$ em X, então $d(x_n, y_n) \to d(x, y)$.[2]

<u>Demonstração:</u>

(1) Suponha que $x_n \to x$. Então, para $\epsilon = 1$, podemos encontrar um n_0, tal que:

$d(x_n, x) < 1$, para todo $n > n_0$. Em consequência da desigualdade triangular, $\forall n$ temos: $d(x_n, x) < 1 + a$, onde:

$$a = \max\{d(x_1, x), \cdots, d(x_{n_0}, x)\}.$$

Isso mostra que (x_n) é limitada.

Assumimos agora que $x_n \to x$ e $x_n \to z$, daí pela desigualdade triangular, temos:

$$0 \leq d(x, z) \leq d(x, x_n) + d(x_n, z) \to 0 + 0 = 0, \text{ quando } n \to \infty$$
$$\Rightarrow 0 \leq d(x, z) \to 0 \Rightarrow x = z.$$

Logo, o limite é único.

(2) Pela desigualdade triangular, temos:

$$d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x) + d(x, y) + d(y, y_n)$$

Assim,

$$d(x_n, y_n) - d(x, y) \leq d(x_n, x) + d(y_n, y) \tag{1.1}$$

Por outro lado,

$$d(x, y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y_n) + d(y_n, y)$$

Ou seja,

$$-(d(x, x_n) + d(y_n, y)) \leq d(x_n, y_n) - d(x, y) \tag{1.2}$$

Por (1.1) e (1.2), temos:

[2]Este resultado junto com o Teorema 1.3.7 nos possibilitará concluir que a métrica é uma função contínua.

$$|d(x_n, y_n) - d(x, y)| \leq d(x_n, x) + d(y_n, y) \to 0 + 0 = 0, \text{ quando } n \to \infty$$
$$\Rightarrow |d(x_n, y_n) - d(x, y)| \to 0$$
$$\Rightarrow d(x_n, y_n) \to d(x, y), \text{ quando } n \to \infty.$$

■

1.3 Sequências de Cauchy e Espaços Métricos Completos

Definição 1.3.1 (Sequência de Cauchy) *Uma sequência (x_n) em um espaço métrico (X, d) é dita ser de Cauchy se, $\forall \epsilon > 0$, $\exists\ n_0$ tal que:*

$$d(x_m, x_n) < \epsilon, \forall m, n > n_0.$$

Definição 1.3.2 (Espaço Métrico Completo) *Um espaço (X,d) é dito ser completo se toda sequência de Cauchy convergir em X (isto é, tem um limite o qual é um elemento de X).*

Teorema 1.3.1 (Sequência de Cauchy) *Toda sequência de Cauchy em (X,d) é limitada.*

<u>Demonstração:</u>
Seja (x_n) uma sequência de Cauchy em (X,d). Assim, para $\epsilon = 1$, deve existir $n_0 \in N$, tal que:

$$d(x_n, x_m) < 1,\ \forall m, n > n_0.$$

Em particular, essa desigualdade vale para $m = n_0 + 1 > n_0$.
Sendo $n > n_0$, temos

$$d(x_n, x_{n_0+1}) < 1.$$

Mas, $\forall n > n_0,\ d(x_n, 0) - d(x_{n_0+1}, 0) \leq d(x_n, x_{n_0+1}) < 1$. Ou seja, $\forall n > n_0$,

$$d(x_n, 0) < d(x_{n_0+1}, 0) + 1.$$

Seja, $k = \max\{d(x_1, 0), d(x_2, 0), \cdots, d(x_{n_0}, 0), d(x_{n_0+1}, 0) + 1\}$.

Assim, $\forall n \in N,\ d(x_n, 0) \leq k$. O que resulta em (x_n) ser limitada.

■

Teorema 1.3.2 (Subsequência de Sequência de Cauchy) *Seja (x_n) uma sequência de Cauchy em (X,d) e (x_{n_j}) uma subsequência de (x_n). Se (x_{n_j}) é convergente, então (x_n) também é.*

<u>Demonstração:</u>

Seja (x_{n_j}) uma subsequência de (x_n), tal que $(x_{n_j}) \to r,\ com\ r \in X$.

Seja $\epsilon > 0$ arbitrário.

Como (x_n) é de Cauchy, para $\frac{\epsilon}{2}$, deve existir $n_1 \in N$, tal que:

$$d(x_n, x_m) < \frac{\epsilon}{2}\ \forall\ m, n > n_1. \tag{1.3}$$

Como $(x_{n_j}) \to r$, deve existir $n_2 \in N$, tal que:

$$\forall n_j > n_2 \Rightarrow d(x_{n_j}, r) < \frac{\epsilon}{2}. \tag{1.4}$$

Consideremos $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$.

Assim, por (1.3) e (1.4), $\forall n > n_0$ temos,

$$\begin{aligned} d(x_n, r) &\leq d(x_n, x_{n_0+1}) + d(x_{n_0+1}, r) \\ &\leq \tfrac{\epsilon}{2} + \tfrac{\epsilon}{2} \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

Desta forma, $x_n \to r$.

■

Teorema 1.3.3 (Completeza de R) *A reta é um espaço métrico completo. Ou seja, toda sequência de Cauchy de números reais é convergente em R.*

<u>DEMONSTRAÇÃO:</u>

Toda sequência de Cauchy é limitada (Teorema 1.3.1). Assim, pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass[3], toda sequência limitada de números reais, possui subsequência convergente. Desta forma, pelo Teorema 1.3.2, toda sequência de Cauchy que possui subsequência convergente também é convergente.

$\blacksquare$

Teorema 1.3.4 (Sequência Convergente) *Toda sequência convergente em um espaço métrico é de Cauchy.*

<u>DEMONSTRAÇÃO:</u>

Se $x_n \to x$, então $\forall\ \epsilon > 0,\ \exists\ n_0$, tal que:

$$d(x_n, x) < \tfrac{\epsilon}{2},\ \forall n > n_0.$$

Daí, pela desigualdade triangular, para $m, n > n_0$, obtemos:

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x) + d(x, x_n) < \tfrac{\epsilon}{2} + \tfrac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$
$$\Rightarrow d(x_m, x_n) < \epsilon$$

Isto mostra que (x_n) é de Cauchy.

$\blacksquare$

Teorema 1.3.5 (Conjunto Fechado) *Seja M um subconjunto de um espaço métrico X e $\overline{M}$ o seu fecho. Então:*

1. *$x \in \overline{M}$ se, e só se, existe uma sequência (x_n) em M, tal que $x_n \to x$.*

[3] Veja Resultados Utilizados, Teorema 3.4.6.

2. *M é fechado se, e só se, para toda $(x_n) \subset M$ convergente, tivermos $\lim_{n\to\infty} x_n \in M$.*

<u>DEMONSTRAÇÃO:</u>

(1) ($\Rightarrow$) Seja $x \in \overline{M}$. Se $x \in M$, considere a sequência $(x_n) = (x, x, \cdots)$, constante. É claro que $x_n \to x \in M$. Por outro lado, se $x \notin M$, sabemos que x é um ponto de acumulação de M. Daí, $\forall\ n \in N, \exists\ x_n \in B(x, 1/n) \cap M \Rightarrow x_n \in M\ e\ d(x_n, x) < 1/n,\ \forall\ n \in N \Rightarrow x_n \to x$, quando $n \to \infty$ e $(x_n) \subset M$

($\Leftarrow$) Se $(x_n) \subset M$ e $x_n \to x$, então:

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists\ n_0 \in N,\ tal\ que\ \forall\ n > n_0 \Rightarrow d(x_n, x) < \epsilon.$$

$$\Rightarrow \forall \epsilon > 0,\ (B(x, \epsilon) \cap M) \neq \emptyset \Rightarrow x \in \overline{M}.$$

(2) ($\Rightarrow$) Sabemos que um conjunto M é fechado se, e só se, $M = \overline{M}$. Seja $(x_n) \subset M$ uma sequência convergente. Por (1), $x = \lim_{n\to\infty} x_n \in \overline{M} = M$. Daí, $x \in M$.

($\Leftarrow$) Seja $x \in \overline{M}$. Por (1), existe $(x_n) \subset M$, com $x_n \to x$. Logo, por hipótese, $x \in M$. Desta forma, $\overline{M} \subset M$. Mas como, $M \subset \overline{M},\ \forall\ M$, tem-se $M = \overline{M}$

$\blacksquare$

Exemplo 1.3.1 (Conjuntos Fechados) *Abaixo, vejamos alguns exemplos de conjuntos fechados e abertos.*

1. *A reta é um conjunto fechado. Segue do fato de R ser completo e do Teorema 1.3.4.*

2. $[0, 1]$ *é fechado.*

3. *(0,1] não é fechado. De fato. Basta considerar* $x_n = \frac{1}{n} \in (0,1], \ \forall n \in N$.

   Temos, então que, $\lim_{n\to\infty} 1/n = 0 \notin \ (0,1]$.

4. *Q não é fechado. De fato, considere* $x_n = (1+\frac{1}{n})^n \in Q, \ \forall \ n \in N$.

   Temos que,
$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e \notin \ Q.$$

Teorema 1.3.6 (Subespaço Completo) *Um subespaço M de um espaço métrico completo X é completo (próprio) se, e só se, M é fechado em X.*

Demonstração:

($\Rightarrow$) Seja M completo. Pelo teorema anterior, $\forall \ x \in \overline{M}, \exists \ (x_n) \in M$, a qual $x_n \to x$. Pelo Teorema 1.3.4 (x_n) é de Cauchy, e pelo fato de M ser completo, temos que (x_n) converge em M. Consequentemente, $x \in M$. Isto prova que M é fechado.

($\Leftarrow$) Seja M fechado e (x_n) de Cauchy em M. Então $x_n \to x \in X$, o que implica, pelo teorema anterior, em $x \in \overline{M}$ e $x \in M$, visto que $M = \overline{M}$, por hipótese. Assim, a sequência de Cauchy (x_n), arbitrária, converge em M, o que prova a sua completeza.

■

Teorema 1.3.7 (Função Contínua) *Uma função* $T : X \to Y$ *de um espaço* (X,d) *em* $(Y,\widetilde{d})$ *é contínua em um ponto* $x_0 \in X$ *se, e só se:*
$$\forall (x_n) \subset X, \ com \ x_n \xrightarrow{d} x_0 \Rightarrow Tx_n \xrightarrow{\widetilde{d}} Tx_0.$$

Demonstração:

($\Rightarrow$) Seja T contínua em x_0. Então, $\ \forall \ \epsilon > 0, \ \exists \ \delta > 0$, tal que:

$$\forall\ x \in X, \text{ com } d(x, x_0) < \delta \Rightarrow \tilde{d}(Tx, Tx_0) < \epsilon.$$

Seja $x_n \xrightarrow{d} x_0$. Então existe n_0 tal que para todo $n > n_0$, temos:

$$d(x_n, x_0) < \delta.$$

Consequentemente, $\forall\ n > n_0$,

$$\tilde{d}(Tx_n, Tx_0) < \epsilon \quad \text{(continuidade de T).}$$

Por definição, isto significa que $Tx_n \xrightarrow{\tilde{d}} Tx_0$.

($\Leftarrow$) Assumimos, agora, que:

$$x_n \xrightarrow{d} x_0 \Rightarrow Tx_n \xrightarrow{\tilde{d}} Tx_0.$$

Provemos então que T é contínua em x_0.
Suponha, por absurdo, que isto seja falso. Então, $\exists\ \epsilon_0 > 0$, tal que, $\forall \delta > 0$, existe um $x \neq x_0$, satisfazendo:

$$d(x, x_0) < \delta, \text{ mas } \tilde{d}(Tx, Tx_0) \geq \epsilon_0.$$

Em particular, para cada $n \in N$, tomando $\delta = \frac{1}{n}$, existe x_n satisfazendo:

$$d(x_n, x_0) < \tfrac{1}{n}, \text{ mas } \tilde{d}(Tx_n, Tx_0) \geq \epsilon_0.$$

Assim, construímos $x_n \xrightarrow{d} x_0$, porém (Tx_n) não converge para Tx_0. Isto contradiz o fato de $Tx_n \xrightarrow{\tilde{d}} Tx_0$.

■

1.4 Exemplos de Espaços Métricos Completos

Exemplo 1.4.1 (Completeza de R^n) *O espaço euclidiano R^n é completo.*

Demonstração:

Lembremos que a métrica euclidiana sobre R^n é definida por:

$$d(x,y) = \left(\sum_{j=1}^{n} (\xi_j - \eta_j)^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{(\xi_1 - \eta_1)^2 + \cdots + (\xi_n - \eta_n)^2},$$

onde $x = (\xi_j) = (\xi_1, \cdots, \xi_n)$ e $y = (\eta_j) = (\eta_1, \cdots, \eta_n)$.

Consideremos uma sequência de Cauchy arbitrária (x_m) em R^n, e escrevemos $x_m = (\xi_1^{(m)}, \cdots, \xi_n^{(m)})$. Visto que (x_m) é de Cauchy, temos $\forall\ \epsilon > 0,\ \exists\ n_0$, tal que:

$$d(x_m, x_r) = \left(\sum_{j=1}^{n} \left(\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(r)}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} < \epsilon. \quad (m, r > n_0) \tag{1.5}$$

Elevando a desigualdade anterior ao quadrado, obtemos $\forall\ m, r > n_0$, e $j = 1, 2, \cdots, n$,

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(r)}\right)^2 < \epsilon^2 \ \Rightarrow\ \left|\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(r)}\right| < \epsilon.$$

Pois é soma de termos positivos que é menor que ϵ^2, logo cada termo é menor que ϵ^2. Desta forma, para cada j fixo, temos que a sequência $(\xi_j^{(1)}, \xi_j^{(2)}, \cdots)$ é uma sequência de Cauchy de números reais. Ela converge pelo Teorema 1.3.3, digamos, $\xi_j^m \to \xi_j$, conforme $m \to \infty$.

Usando este limite n vezes, definimos $x = (\xi_1, \cdots, \xi_n)$. Ou seja, garantimos a existência dessas n coordenadas e, consequentemente, temos que $x \in R^n$.

De (1.5), com $r \to \infty$, obtemos:

$$\begin{aligned}
\epsilon \geq \lim_{r\to\infty} d(x_m, x_r) &= \lim_{r\to\infty} \left(\sum_{j=1}^{n} \left(\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(r)}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\sum_{j=1}^{n} \left(\lim_{r\to\infty} \xi_j^{(m)} - \lim_{r\to\infty} \xi_j^{(r)}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\sum_{j=1}^{n} \left(\xi_j^{(m)} - \xi_j\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= d(x_m, x) \qquad\qquad (m > n_0).
\end{aligned}$$

Isto mostra que x é o limite de (x_n) e prova a completeza de R^n, visto que (x_n) é uma sequência de Cauchy arbitrária.

■

Observação 1.4.1 (Completeza de R^n) *Pela equivalência das métricas, R^n também é completo com as métricas da soma e do máximo.*

Exemplo 1.4.2 (Completeza do Espaço de Funções Contínuas) *O espaço de funções C[a,b] é completo.*

DEMONSTRAÇÃO:
Seja (x_m) qualquer sequência de Cauchy em C[a,b]. Então, dado $\epsilon > 0$, $\exists\, n_0$, tal que $\forall\, m, n > n_0$, temos:

$$d(x_m, x_n) = \max_{t \in J} |x_m(t) - x_n(t)| < \epsilon \tag{1.6}$$

onde J=[a,b]. Consequentemente, para todo $t = t_0 \in J$ fixo,

$$|x_m(t_0) - x_n(t_0)| < \epsilon \quad (m, n > n_0)$$

Assim, temos que $(x_1(t_0), x_2(t_0), \cdots)$ é uma sequência de Cauchy de números reais. Visto que R é completo, a sequência converge, digamos, $x_m(t_0) \to x(t_0)$, conforme $m \to \infty$. Deste modo, pela unicidade de limite, podemos associar para cada $t \in J$ um único número real x(t). Isto define uma função x em J. Mostremos que $x \in C[a, b]$ e $x_m \to x$.
De (1.6), quando $n \to \infty$, obtemos:

$$\begin{aligned} \epsilon \geq \lim_{n\to\infty} d(x_m, x_n) &= \lim_{n\to\infty} \max_{t \in J} |x_m(t) - x_n(t)| \\ &= \max_{t \in J} \left| \lim_{n\to\infty} x_m(t) - \lim_{n\to\infty} x_n(t) \right| \\ &= \max_{t \in J} |x_m(t) - x(t)| \\ &= d(x_m, x) \qquad\qquad (m > n_0). \end{aligned}$$

Consequentemente, para todo $t \in J$,

$$|x_m(t) - x(t)| \leq \epsilon, \ (m > n_0).$$

Mostramos assim que $(x_m(t))$ converge uniformemente[4] em J. Visto que as x_m's são contínuas em J e a convergência é uniforme, temos que a função limite x é contínua em J. Desta forma, x ∈ C[a,b]. Além disso, $x_m \to x$. Isto prova a completeza de C[a,b].

■

Exemplo 1.4.3 (Funções Contínuas) *Sejam X o conjunto de todas funções reais contínuas em J=[0,1], $x, y \ \in X$ e seja:*

$$d(x,y) = \int_0^1 |x(t) - y(t)| \, .$$

Afirmação: Este espaço não é completo.

Demonstração:

As funções x_m na figura (1.1) formam uma sequência de Cauchy, pois $d(x_m, x_n)$ é a área do triângulo na figura (1.2). De fato, para todo $\epsilon > 0$ e $\forall m, n > 1/2\epsilon$, com $n > m$, temos:

$$d(x_m, x_n) = \frac{\left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right| \cdot 1}{2} < \frac{\left|\frac{1}{m}\right|}{2} = \frac{1}{2m} < \frac{2\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Mostremos que x_m não converge em X.

Temos que,

$$x_m(t) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad t \in [0, \frac{1}{2}] \\ 1, & \text{se} \quad t \in [a_m, 1] \end{cases} ,$$

onde $a_m = \frac{1}{2} + \frac{1}{m}$.

---

[4]Veja Definição 3.4.2 em Resultados Utilizados.

[width=]nova

Figura 1.1: Sequência x_m

[width=]agora

Figura 1.2: Sequências x_n e x_m

Desta forma, para todo x ∈ X,

$$\begin{aligned} d(x_m, x) &= \int_0^1 |x_m(t) - x(t)|\, dt \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} |x(t)|\, dt + \int_{\frac{1}{2}}^{a_m} |x_m(t) - x(t)|\, dt + \int_{a_m}^1 |1 - x(t)|\, dt. \end{aligned}$$

Visto que os integrandos de cada integral à direita são não negativos, $d(x_m, x) \to 0$, implicaria que cada integral aproximaria de zero e, pelo fato de x ser contínua, teríamos:

$$x(t) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad t \in [0, \frac{1}{2}) \\ 1, & \text{se} \quad t \in (\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Mas isto é impossível para uma função contínua. Desta forma (x_m) não converge em X, isto é, não tem um limite em X.

■

Exemplo 1.4.4 *Pelo Exemplo 1.3.1 e Teorema 1.3.6, considerando a métrica usual da reta, temos que [0,1] é completo, enquanto que (0,1] e Q não são completos.*

Capítulo 2

O Teorema do Ponto Fixo de Banach

Neste capítulo iremos enunciar e demonstrar o Teorema do Ponto Fixo de Banach, bem como algumas de suas versões. Um dos motivos de sua importância está no fato de fornecer um método iterativo eficiente para encontrar pontos fixos. Ressaltamos também a importância do Teorema (2.3.1). Nesse, a hipótese de contratividade é enfraquecida. Isto reflete nas aplicações, pois, teoricamente, garante os mesmos resultados para um número maior de problemas.

2.1 Ponto Fixo e Contração

Definição 2.1.1 (Ponto Fixo) *Um ponto fixo de uma função $T : X \to X$ é um $x \in X$ o qual é levado em si mesmo (x é mantido fixo) por T, ou seja,*

$$Tx=x.$$

Exemplo 2.1.1 (Ponto Fixo) *Consideremos as funções $T : R \to R$, definidas abaixo:*

1. $Tx = x^3$. T tem -1, 0 e 1 como pontos fixos.

2. $Tx = x$. T possui infinitos pontos fixos.

3. $Tx = \frac{x}{2} - \frac{1}{x}$. T não possui pontos fixos. De fato, do contrário teríamos:

$$Tx = \tfrac{x}{2} - \tfrac{1}{x} = x$$
$$\tfrac{x^2-2}{2x} = \tfrac{2x^2}{2x}$$
$$\Rightarrow x^2 = -2, \nexists x \in R.$$

Definição 2.1.2 (Contração) *Seja (X, d) um espaço métrico. Uma função $T : X \to X$ é chamada uma contração sobre X se existe um número real positivo $\alpha < 1$, tal que para todo $x, y \in X$, ocorrer:*

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y). \tag{2.1}$$

Lema 2.1.1 (Unicidade de Ponto Fixo) *Num epaço métrico (X, d), se $T : X \to X$ é uma contração e T possui um ponto fixo, então esse ponto fixo é único.*

<u>Demonstração:</u>

De fato, suponhamos que x e x' sejam pontos fixos de T. Assim, teríamos,

$$\begin{aligned}
d(x, x') &= d(Tx, Tx') \\
&\leq \alpha d(x, x') \qquad (\alpha < 1) \\
&\Rightarrow (1-\alpha) d(x, x') \leq 0 \\
&\Rightarrow d(x, x') = 0 \\
&\Rightarrow x = x'.
\end{aligned}$$

■

Lema 2.1.2 (Contração) *Se T é uma contração, então T^n $(n \in N)$ também é uma contração.*

DEMONSTRAÇÃO:

Usemos a indução sobre n. Se n=1, não há o que mostrar.

Suponhamos que a afirmação seja verdadeira para r, ou seja, $d(T^r x, T^r y) \leq \alpha d(x, y)$, com $0 < \alpha < 1$. Provemos, então que $d(T^{r+1}x, T^{r+1}y) \leq kd(x, y)$ para $0 < k < 1$.

De fato,

$$\begin{aligned} d(T^{r+1}x, T^{r+1}y) &= d(T^r(Tx), T^r(Ty)) \\ &\leq \alpha d(Tx, Ty) \\ &\leq k_1 \alpha d(x, y), \ \mathit{onde}\ 0 < k_1 < 1 \end{aligned}$$

Assim, $d(T^{r+1}x, T^{r+1}y) \leq kd(x, y)$, onde $0 < k < 1 \ e \ k = k_1\alpha$.

■

2.2 O Teorema do Ponto Fixo de Banach

Teorema 2.2.1 (Teorema do Ponto Fixo de Banach) *Considere um espaço (X, d), onde $X \neq \emptyset$. Suponha que X é completo e seja $T : X \to X$ uma contração sobre X. Então, T tem precisamente um ponto fixo.*

DEMONSTRAÇÃO:

Construiremos uma sequência (x_n) e mostraremos que ela é de Cauchy, assim ela convergirá no espaço completo X. Em seguida, mostraremos que seu limite x é um ponto fixo de T, logo T não possuirá mais pontos fixos. Esta é a idéia da demonstração.

Escolhemos qualquer $x_0 \in X$ e definimos a sequência iterativa x_n por:

$$x_0, \quad x_1 = Tx_0, \quad x_2 = Tx_1 = T^2x_0, \quad \cdots, \quad x_n = Tx_{n-1} = T^n x_0, \quad \cdots. \tag{2.2}$$

Mostraremos que x_n é de Cauchy. Por (2.1) e (2.2), temos:

$$\begin{aligned} d(x_{m+1}, x_m) &= d(Tx_m, Tx_{m-1}) \\ &\leq \alpha d(x_m, x_{m-1}) \\ &= \alpha d(Tx_{m-1}, Tx_{m-2}) \\ &\leq \alpha^2 d(x_{m-1}, x_{m-2}) \\ \cdots &\leq \alpha^m d(x_1, x_0) \end{aligned} \tag{2.3}$$

Desta forma, pela desigualdade triangular e usando a fórmula para a soma de uma progressão geométrica, obtemos para $n > m$,

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_n) \\ &\leq d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_{m+2}) + d(x_{m+2}, x_n) \\ &\leq d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_{m+2}) + \cdots + d(x_{n-1}, x_n) \\ &\leq \alpha^m d(x_1, x_0) + \alpha^{m+1} d(x_1, x_0) + \cdots + \alpha^{n-1} d(x_1, x_0) \\ &= (\alpha^m + \alpha^{m+1} + \cdots \alpha^{n-1}) d(x_1, x_0) \\ &= \alpha^m \tfrac{(1-\alpha^{n-m})}{1-\alpha} d(x_1, x_0). \end{aligned} \tag{2.4}$$

Por $0 < \alpha < 1$, temos $1 - \alpha^{n-m} < 1$. Consequentemente,

$$d(x_m, x_n) \leq \frac{\alpha^m}{1-\alpha} d(x_0, x_1) \qquad (n > m). \tag{2.5}$$

À direita , $0 < \alpha < 1$ e $d(x_0, x_1)$ é fixo, assim podemos fazer o lado direito tão pequeno quanto desejarmos, tomando m suficientemente grande e $n > m$. Ou seja,

$$0 \leq d(x_m, x_n) < \frac{\alpha^m}{1-\alpha} d(x_1, x_0) \to 0 \qquad (m, n \to \infty)$$

$$\Rightarrow d(x_m, x_n) \to 0 \qquad (m, n \to \infty).$$

Isto prova que (x_m) é de Cauchy. Como X é completo, $\exists\ x \in X$, tal que $x_m \to x$. Mostremos que este limite x é um ponto fixo de T.

Pela desigualdade triangular e por (2.1), temos:

$$\begin{aligned} d(x,Tx) &\leq d(x,x_m) + d(x_m,Tx) \\ &= d(x,x_m) + d(Tx_{m-1},Tx) \\ &\leq d(x,x_m) + \alpha d(x_{m-1},x). \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} d(x,Tx) &= \lim_{m\to\infty} d(x,Tx) \\ &\leq \lim_{m\to\infty} d(x,x_m) + \alpha \lim_{m\to\infty} d(x_{m-1},x) \\ &= 0+0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Desta forma, concluímos que $d(x,Tx) = 0$, o que resulta em $Tx = x$. A unicidade de x é garantida pelo Lema 2.1.1.

■

Corolário 2.2.1 (Repetição, Saltos de Erros) *Sob as condiçoes do Teorema (2.2.1) a sequência iterativa (2.2) com $x_0 \in X$ arbitrário converge para o único ponto fixo de T. Estimativas de Erro são a Estimativa Inicial:*

$$d(x_m,x) \leq \frac{\alpha^m}{1-\alpha} d(x_0,x_1) \tag{2.6}$$

e a estimativa posterior:

$$d(x_m,x) \leq \frac{\alpha}{1-\alpha} d(x_{m-1},x_m) \tag{2.7}$$

DEMONSTRAÇÃO:

De fato, vimos no Teorema (2.2.1) que a sequência iterativa converge para o único ponto fixo de T, isto é, $x_n \to x$, com $x_0 \in X$ qualquer. A desigualdade (2.6) segue de (2.5), fazendo $n \to \infty$. Obteremos, agora, (2.7). Tomemos m=1 e troquemos x_0 por y_0 e x_1 por y_1, assim de (2.6) temos:

$$d(y_1,x) \leq \tfrac{\alpha}{1-\alpha} d(y_0,y_1).$$

Fazendo $y_0 = x_{m-1}$, temos $y_1 = Ty_0 = Tx_{m-1} = x_m$ e, assim, obtemos (2.7).

■

O erro anterior (2.6) pode ser usado no começo do cálculo para calcular o número de passos necessários para obter uma determinada precisão. (2.7) pode ser usado em fase intermediária ou no fim do cálculo.
Do ponto de vista da matemática aplicada, a situação não é completamente satisfatória, uma vez que frequentemente acontece de uma função não ser uma contração em todo espaço X, mas o ser em um subconjunto Y de X. Porém, se Y é fechado, ele é completo pelo Teorema (1.3.6), de forma que T tem um ponto fixo x em Y e $x_m \to x$. Assim, imporemos uma restrição satisfatória na escolha de x_0, de forma que x_m's permaneçam em Y.

Teorema 2.2.2 (Contração em uma bola) *Seja T uma função num espaço métrico completo X=(X,d). Suponha que T é uma contração em uma bola fechada Y=$\{x;\ d(x, x_0) \leq r\}$, isto é, T satisfaz (2.1) para todo $x, y \in Y$. Além disso, assuma que:*

$$d(x_0, Tx_0) < (1 - \alpha)r. \tag{2.8}$$

Então, a sequência iterativa (2.2) converge para um $x \in Y$. Este x é um ponto fixo de T e é único.

<u>Demonstração:</u>

Temos que mostrar que, todas sequências iterativas ($x'_m s$), bem como x estão em Y. Pondo m=0 em (2.5), trocando n por m e usando (2.8) temos:

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &= d(x_0, x_m) \\ &\leq \tfrac{d(x_0,x_1)}{1-\alpha} \\ &= \tfrac{d(x_0,Tx_0)}{1-\alpha} \\ &< \tfrac{(1-\alpha)r}{1-\alpha} \\ &= r \\ &\Rightarrow d(x_m, x_0) < r. \end{aligned}$$

Desta forma, todas x_m's estão em Y. Além disso, $x \in Y$, visto que $x_m \to x$ e Y é fechado. Pelo Teorema (1.3.6), temos que Y é completo, assim x é o único ponto fixo de T.

■

2.3 Duas Versões Fracas do Teorema do Ponto Fixo de Banach

Nesta seção tratamos de duas versões do (T.P.F.B), uma na qual a condição de contratividade ocorre com $\alpha = 1$ e outra onde T não é uma contração, porém alguma potência de T o é.
A condição $\alpha < 1$ é fundamental para a demontração do (T.P.F.B) e sem ela suas conclusões podem não ser mais válidas.

Exemplo 2.3.1 (Contração Fraca) *Seja $M = [1, \infty)$ com a métrica usual $d(x, y) = |x - y|$ e seja $T : M \to M$ dada por $Tx = x + x^{-1}$. Então para todo $x, y \in M, x \neq y$, vale:*

$$d(Tx, Ty) < d(x, y).$$

<u>DEMONSTRAÇÃO:</u>
De fato, para $1 \leq y < x$, pelo Teorema Fundamental do Cálculo (T.F.C.)

(veja Resultados Utilizados),

$$Tx - Ty = \int_y^x T'(t)dt = \int_y^x \left(1 - \frac{1}{t^2}\right) dt < \int_y^x dt = x - y,$$

pois, $1 - t^2 < 1$, para $t > 1$. Assim,

$$|Tx - Ty| < |x - y|.$$

■

No exemplo acima, observe que T não possui nenhum ponto fixo. De fato, se $Tx = x$, teríamos $x + x^{-1} = x$, ou seja $x^{-1} = 0$, o que não é possível.

Em espaços métricos compactos, porém, a condição $\alpha < 1$ pode ser enfraquecida preservando essencialmente os mesmos resultados do (T.P.F.B). Vejamos o seguinte teorema.

Teorema 2.3.1 (Funções em Compactos) *Seja (M,d) um espaço métrico. Considere $A \subset M$ compacto (na topologia induzida em M pela métrica d) e seja a função $T : A \to A$. Suponhamos, ainda que:*

$$d(Tx, Ty) < d(x, y), \ \forall x, y \in A \text{ com } x \neq y. \tag{2.9}$$

Então, T possui um único ponto fixo.

<u>Demonstração:</u>

Consideremos qualquer $x_0 \in A$. Pelo fato de A ser compacto, a sequência iterativa $x_n = T^n(x_0)$ tem ao menos uma subsequência convergente a um elemento $x_* \in A$.

Provemos que esse x_* é um ponto fixo de T, ou seja $Tx_* = x_*$. Provaremos por absurdo. Suponhamos que $Tx_* \neq x_*$ e mostremos que isso nos leva a uma contradição.

Seja x_{n_k}, $k \in N$, uma subsequência de $x_n = T^n(x_0)$ que converge a x_*, ou seja:

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists n_0;\ d(x_{n_k}, x_*) < \epsilon,\ \forall k \geq n_0$$

Por (2.9), $d(Tx_*, Tx_{n_k}) \leq d(x_*, x_{n_k}) < \epsilon$, (a igualdade ocorrendo quando $x_* = x_{n_k}$), o que resulta em $Tx_{n_k} \to Tx_*$. Portanto (x_{n_k}, Tx_{n_k}) converge a (x_*, Tx_*) em A^2.

Seja $\epsilon = r_0 = \frac{d(Tx_*, x_*)}{3}$. Para este ϵ, existe $K(r_0)$, tal que $k \geq K(r_0)$ vale $d(x_*, x_{n_k}) \leq r_0$. Assim, pela desigualdade triangular, temos:

$$\begin{aligned} 3r_0 &= d(Tx_*, x_*) \\ &\leq d(Tx_*, Tx_{n_k}) + d(Tx_{n_k}, x_{nk}) + d(x_{nk}, x_*) \\ &\overset{(2.9)}{\leq} d(x_{n_k}, x_*) + d(Tx_{n_k}, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x_*) \\ &= 2d(x_*, x_{n_k}) + d(Tx_{n_k}, x_{n_k}) \\ &\leq 2r_0 + d(Tx_{n_k}, x_{n_k}) \end{aligned}$$

Logo, para todo $k \geq K(r_0)$, $r_0 \leq d(Tx_{n_k}, x_{n_k})$, ou melhor,

$$\begin{aligned} d(Tx_*, x_*) &\leq 2r_0 + d(Tx_{n_k}, x_{n_k}) \\ &\leq 2d(Tx_{n_k}, x_{n_k}) + d(Tx_{n_k}, x_{n_k}) \\ &\leq 3d(Tx_{n_k}, x_{n_k}) \end{aligned} \tag{2.10}$$

Consideremos, agora, $D = \{(x, x),\ x \in A\} \subset A^2$, o conjunto diagonal de A^2 e, definimos em $A^2 \backslash D$ a função $F : A^2 \backslash D \to [0, +\infty)$ dada por:

$$F(x, y) = \frac{d(Tx, Ty)}{d(x, y)}.$$

F está bem definida e, por sua vez, é contínua, pois é quociente de funções contínuas.

Por (2.9), $F(x, y) < 1$, $\forall (x, y) \in A^2 \backslash D$. Como, por hipótese, $Tx_* \neq x_*$, o par (x_*, Tx_*) não pertence a D e, portanto, $F(x_*, Tx_*)$ está bem definida. Seja $r > 0$ e $\overline{B}_r$ a bola fechada de raio r em $A^2\backslash D$ centrada em (x_*, Tx_*);

$$\overline{B}_r = \{(x, y) \in A^2\backslash D;\ d'[(x, y), (x_*, Tx_*)] = d(x, x_*) + d(y, Tx_*) \leq r\}$$

Por F ser contínua, F assume um valor máximo em $\overline{B}_r$, digamos M. Escolhemos r pequeno o suficiente para termos $M < 1$.
De fato,

$$\exists\ (x_0, y_0) \in \overline{B}_r,\ com\ M = F(x_0, y_0);$$
$$d(x_0, y_*) \leq r \text{ e } d(y_0, Tx_*) \leq r$$

assim, quando $r \to 0$, temos $x_0 \to x_*$ e $y_0 \to Tx_*$

$$\Rightarrow F(x_0, y_0) \to F(x_*, Tx_*) < 1.$$

Desta forma, para todo $(x, y) \in \overline{B}_r$, temos:

$$d(Tx, Ty) \leq Md(x, y). \tag{2.11}$$

Como (x_{n_k}, Tx_{n_k}) converge a (x_*, Tx_*), concluímos que para todo l grande o suficiente, digamos $l \geq L$, vale $(x_{n_l}, Tx_{n_l}) \in \overline{B}_r$. Assim, por (2.11) temos,

$$d(Tx_{n_l}, T(Tx_{n_l})) \leq Md(x_{n_l}, Tx_{n_l}),$$

ou seja,

$$d(x_{n_l+1}, x_{n_l+2}) \leq Md(x_{n_l}, x_{n_l+1}). \tag{2.12}$$

Temos, assim, que

$$\begin{aligned} d(x_{n_{(l+1)}}, T(x_{n_{(l+1)}})) &= d(T^{n_{(l+1)}}(x_0), T^{n_{(l+1)}+1}(x_0)) \\ &\overset{(2.9)}{\leq} d(T^{n_l+1}(x_0), T^{n_l+2}(x_0)) \\ &= d(x_{n_l+1}, x_{n_l+2}) \\ &\overset{(2.12)}{\leq} Md(x_{n_l}, x_{n_{l+1}}) \\ &= Md(x_{n_l}, Tx_{n_l}) \end{aligned} \tag{2.13}$$

Em (2.13), na passagem da primeira para a segunda linha, usamos $n_{(l+1)} - n_l - 1$ vezes a condição (2.9).

Provamos, portanto, que $d(x_{n_{(l+1)}}, T(x_{n_{(l+1)}})) \leq Md(x_{n_l}, Tx_{n_l})$ para todo $l \geq L$. Por indução, isto implica que para todo $k \geq l \geq L$ vale,

$$d(x_{n_k}, Tx_{n_k}) \leq M^{k-l} d(x_{n_l}, Tx_{n_l}).$$

De fato, para $k = l$, temos $d(x_{n_k}, Tx_{n_k}) \leq M^{k-k} d(x_{n_k}, Tx_{n_k})$, o que nos leva a igualdade.

Suponhamos, que afirmação seja verdadeira para k, ou seja, que vale $d(x_{n_k}, Tx_{n_k}) \leq M^{k-l} d(x_{n_l}, Tx_{n_l})$. Provemos, então, que vale para $k+1$. Assim,

$$\begin{aligned} d(x_{n_{(k+1)}}, Tx_{n_{(k+1)}}) &\overset{(2.13)}{\leq} Md(x_{n_k}, Tx_{n_k}) \\ &\leq MM^{k-l} d(x_{n_l}, Tx_{n_l}) \\ &= M^{(k+1)-l} d(x_{n_l}, Tx_{n_l}). \end{aligned}$$

Fixando l, isto implica que, $\lim\limits_{k \to \infty} d(x_{n_k}, Tx_{n_k}) = 0$, pois $M < 1$. Por (2.10), isso implica que $d(Tx_*, x_*) = 0$, o que nos leva a um contradição, pois supomos que $Tx_* \neq x_*$.

■

Lema 2.3.1 (Ponto Fixo) *Seja $T : X \to X$ uma função num espaço métrico completo (X,d), e suponha que T^m (m inteiro positivo) é uma contração para algum m. Então, T possui um único ponto fixo.*

DEMONSTRAÇÃO:

Por hipótese, $B = T^m$ é uma contração em X. Daí, pelo (T.P.F.B), B possui um único ponto fixo $\widehat{x}$, tal que, $B\widehat{x} = \widehat{x}$. Desta forma, $B^n\widehat{x} = \widehat{x}$. Isso resulta, pela sequência iterativa, que para qualquer $x \in X$,

$$B^n x \to \widehat{x}, \qquad n \to \infty.$$

Em particular, $x = T\widehat{x}$. Visto que $B^n = T^{nm}$, obtemos:

$$\begin{aligned} \widehat{x} &= \lim_{n\to\infty} B^n T\widehat{x} \\ &= \lim_{n\to\infty} TB^n\widehat{x} \\ &= \lim_{n\to\infty} T\widehat{x} \\ &= T\widehat{x}. \end{aligned}$$

Isto mostra que $\widehat{x}$ é um ponto fixo de T e, este é único, pois $\widehat{x}$ também é ponto fixo de T^m que, por sua vez é uma contração.

■

Capítulo 3

Aplicações do Teorema do Ponto Fixo de Banach

Neste capítulo aplicaremos o Teorema do Ponto Fixo de Banach em Equações Numéricas, Equações Lineares, Equações Diferenciais e em Equações Integrais.

3.1 Aplicações em Equações Numéricas

Apresentamos aqui, duas aplicações do (T.P.F.B.) em equações numéricas, das quais estimamos suas soluções.

Exemplo 3.1.1 (Soluções Numéricas) *Seja a equação* $x = \lambda \cos x,\ 0 < \lambda < 1$. *Esta equação possui solução em* R? *Tal solução é única?*

DEMONSTRAÇÃO:

Seja $T : R \to R$, com $Tx = \lambda \cos x$. Daí,

$$\begin{aligned}
d(Tx,Ty) &= |Tx - Ty| \\
&= |\lambda \cos x - \lambda \cos y| \\
&= \lambda\,|\cos x - \cos y| \\
&= \lambda \left| \int_y^x \sin t dt \right| \\
&\leq \lambda \int_y^x |\sin t|\, dt \\
&\leq \lambda \int_y^x dt \\
&= \lambda(x-y) \\
&\leq \lambda\,|x-y| \\
&= \lambda d(x,y)
\end{aligned}$$

Assim, $d(Tx,Ty) \leq \lambda d(x,y)$ e T é uma contração.
Como R é completo, temos pelo (T.P.F.B.) que, $\exists x \in R$ tal que $Tx = x$, ou seja, $x = \lambda \cos x$ tem solução única.

■

O (T.P.F.B.) nos fornece um método iterativo de obter solução numérica de determinados tipos de equações. No exemplo anterior, se fizermos $\lambda = 1/2$ e tomarmos $x_0 = 0$, teremos:

$x_1 = T(0) = 1/2 \cos(0) = 1/2$
$x_2 = T(1/2) = 1/2 \cos(1/2) = 0.438791$
$x_3 = T(0.438791) = 1/2 \cos(0.438791) = 0.452632$
$x_4 = T(0.452632) = 1/2 \cos(0.452632) = 0.449649$
$x_5 = T(0.449649) = 1/2 \cos(0.449649) = 0.450299$
$x_6 = T(0.450299) = 1/2 \cos(0.450299) = 0.450158$

Repetindo esse processo algumas vezes, encontraremos um valor aproximado da solução deste problema.

Exemplo 3.1.2 (Soluções Numéricas) *A equação $x = e^{-x}$ possui solução em R? Esta solução é única?*

<u>DEMONSTRAÇÃO:</u>

Seja $T : [0, 1] \to [0, 1]$, tal que $Tx = e^{-x}$.

Visto que $[0, 1]$ é compacto, devemos mostrar, pelo Teorema (2.3.1), que $d(Tx, Ty) < d(x, y)$.

De fato,

$$(Tx)' = -e^{-x}.$$

Daí,

$$|T'x| = e^{-x} \leq 1, \forall\ x \in [0, 1].$$

Assim, como T tem derivada limitada, então T é lipschitziana (veja Resultados Utilizados), ou seja,

$$|Tx - Ty| \leq |x - y| \ \Rightarrow d(Tx, Ty) < d(x, y).$$

Portanto, a equação $x = e^{-x}$ tem solução única em $[0, 1]$.

■

Estimemos uma solução para este problema. Façamos $x_0 = 1/2$. Assim, temos,

$x_1 = T(1/2) = e^{-1/2} = 0.606530$

$x_2 = T(0.606530) = e^{-0.606530} = 0.545239$

$x_3 = T(0.545239) = e^{-0.545239} = 0.579703$

$x_4 = T(0.579703) = e^{-0.579703} = 0.560064$

$x_5 = T(0.560064) = e^{-0.560064} = 0.571172$

$x_6 = T(0.571172) = e^{-0.571172} = 0.564863$
$x_7 = T(0.564863) = e^{-0.564863} = 0.568438$

Vemos que, a medida que fazemos mais iterações o valor de $x_n \to x_{n-1}$, o que nos leva a um valor aproximado da solução.

3.2 Aplicações em Equações Lineares

Teorema 3.2.1 (Equações Lineares) *Seja o sistema,*

$$x = Cx + b \qquad (C = (c_{jk}),\ b \text{ dado}) \tag{3.1}$$

de n equações lineares em n incógnitas $\xi_1, \cdots, \xi_n$ (as componentes de x) satisfazendo,

$$\sum_{k=1}^{n} |c_{jk}| < 1 \qquad (j = 1, \cdots, n) \tag{3.2}$$

Desta forma, este sistema tem somente uma solução x. Esta solução pode ser obtida como o limite da sequência iterativa $(x^{(0)}, x^{(1)}, \cdots)$, onde $x^{(0)}$ é arbitrário e

$$x^{(m+1)} = Cx^{(m)} + b, \qquad m = 0, 1, \cdots \tag{3.3}$$

Saltos de erros são:

$$d(x^{(m)}, x) \leq \frac{\alpha}{1-\alpha} d(x^{(m-1)}, x^{(m)}) \leq \frac{\alpha^m}{1-\alpha} d(x^{(0)}, x^{(1)}). \tag{3.4}$$

<u>DEMONSTRAÇÃO:</u>
Para aplicarmos o (T.P.F.B.) devemos ter um espaço métrico completo e uma contração nele. Tomemos o conjunto $X = R^n$, com

$$x = (\xi_1, \cdots, \xi_n),\ y = (\eta_1, \cdots, \eta_n),\ z = (\zeta_1, \cdots, \zeta_n).$$

Em X definimos a métrica d por:

$$d(x,z) = \max_j |\xi_j - \zeta_j| \,. \tag{3.5}$$

Nessas condições (X,d) é completo. Essa afirmação é válida, pois as métricas euclidiana e do máximo são equivalentes em R^n. Em X definamos $T : X \to X$, dada por:

$$y = Tx = Cx + b, \tag{3.6}$$

onde $C = (c_{jk})$ é uma matriz $(n \times n)$, fixa, de números reais e $b \in X$ um vetor fixo. Aqui, todos os vetores serão considerados como vetores coluna, devido a convenção usual da multiplicação de matrizes.
Agora, buscaremos condições para T ser uma contração. Escrevendo (3.6) na forma de suas coordenadas, temos,

$$\eta_j = \sum_{k=1}^{n} c_{jk}\xi_k + \beta_j, \qquad j = 1, \cdots, n,$$

onde $b = (\beta_j)$. Escolhendo $w = (\omega_j) = Tz$, obtemos de (3.5) e (3.6):

$$\begin{aligned}
d(y,w) &= d(Tx,Tz) \\
&= \max_j |\eta_j - \omega_j| \\
&= \max_j \left| \sum_{k=1}^{n} (c_{jk}\xi_k + \beta_j) - \sum_{k=1}^{n} (c_{jk}\zeta_k + \beta_j) \right| \\
&= \max_j \left| \sum_{k=1}^{n} c_{jk}(\xi_k - \zeta_k) \right| \\
&\leq \max_j \sum_{k=1}^{n} |c_{jk}| \, |(\xi_k - \zeta_k)| \\
&\leq \max_j \sum_{k=1}^{n} |c_{jk}| \max_i |\xi_i - \zeta_i| \\
&= \max_i |\xi_i - \zeta_i| \max_j \sum_{k=1}^{n} |c_{jk}| \\
&= d(x,z) \max_j \sum_{k=1}^{n} |c_{jk}|
\end{aligned}$$

Vemos que esta desigualdade pode ser escrita por $d(y,w) \leq \alpha d(x,z)$, onde

$$\alpha = \max_j \sum_{k=1}^{n} |c_{jk}| \, .$$

De (3.2), temos que $\alpha < 1$ e portanto, T é uma contração.

Obtemos (3.3) a partir da sequência iterativa, na qual temos que $x^{(m)} = Tx^{(m-1)}$ e, (3.4) é consequência do Corolário (2.2.1).

■

3.3 Aplicações em Equações Diferenciais

As aplicações mais interessantes do Teorema do Ponto Fixo de Banach surgem em espaços de funções. O Teorema então permite a existência e unicidade para equações diferenciais e integrais.

De fato, nesta seção consideraremos a Equação Diferencial Ordinária explícita de primeira ordem,

$$x' = f(t,x). \tag{3.7}$$

Um problema de valor inicial para uma equação, consiste da equação e de uma condição inicial,

$$x(t_0) = x_0, \tag{3.8}$$

onde t_0 e x_0 são números reais dados.

Usaremos o (T.P.F.B.) para provar o Teorema de Picard's. A idéia é: (3.7) será convertida em uma equação integral que define uma função T. Provaremos, então, que T é uma contração, na qual seu ponto fixo se torna solução do nosso problema.

Teorema 3.3.1 (Teorema de Picard's) *Seja f uma função contínua num retângulo,*

$$R = \{(t,x); \ |t - t_0| \leq a, \ |x - x_0| \leq b\}$$

e assim, limitada em R,

$$|f(t,x)| \leq c, \qquad \forall\ (t,x) \in R. \tag{3.9}$$

Suponha que f satisfaça a condição de Lipschitz em R, com respeito ao seu segundo argumento, isto é, existe uma constante k tal que, para (t,x), (t,v) ∈ R,

$$|f(t,x) - f(t,v)| \leq k\,|x - v|\,. \tag{3.10}$$

Desta forma, o problema de valor inicial tem uma única solução. Esta solução existe no intervalo $[t_0 - \beta, t_0 + \beta]$*, onde:*

$$\beta < \min\left\{a, \frac{b}{c}, \frac{1}{k}\right\}. \tag{3.11}$$

<u>DEMONSTRAÇÃO:</u>

Seja C(J) o espaço métrico de todas funções contínuas de valores reais no intervalo

$J = [t_0 - \beta, t_0 + \beta]$ com a métrica d definida por:

$$d(x,y) = \max_{t \in J} |x(t) - y(t)|\,.$$

C(J) é completo, como sabemos do exemplo (1.4.2). Seja $\widetilde{C}$ um subespaço de C(J), consistindo de todas as funções $x \in C(J)$ que satisfazem:

$$|x(t) - x_0| \leq c\beta. \tag{3.12}$$

$\widetilde{C}$ é fechado em C(J). De fato, Suponha que para x_n em $\widetilde{C}$, $x_n \to x$. Daí,

$$\begin{aligned}
|x(t) - x_0| &= \lim_{n\to\infty} |x(t) - x_0| \\
&= \lim_{n\to\infty} |(x(t) - x_n(t)) + (x_n(t) - x_0)| \\
&\leq \lim_{n\to\infty} |x(t) - x_n(t)| + \lim_{n\to\infty} |x_n(t) - x_0| \\
&\leq 0 + |x(t) - x_0| \\
&\leq c\beta.
\end{aligned}$$

Assim, $x \in \widetilde{C}$ e C é fechado pelo Teorema (1.3.5).

Pelo (T.F.C.), vemos que (3.7) e (3.8) pode ser escrita por x=Tx, onde $T : \widetilde{C} \to \widetilde{C}$ é definida por,

$$Tx(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))d\tau. \tag{3.13}$$

T está bem definida para todo $x \in \widetilde{C}$. Para tanto, é preciso mostrarmos que:

(1) A integral em (3.13) existe. De fato, para $\tau \in J$ e $x(\tau) \in \widetilde{C}$, como $c\beta < b$ e $\beta < a$, qualquer que seja o mínimo em (3.11), temos:

$$\begin{aligned}
\tau \in J \quad &\Rightarrow \quad t_0 - \beta \leq \tau \leq t_0 + \beta \\
&\Rightarrow \quad t_0 - a \leq t_0 - \beta \leq \tau \leq t_0 + \beta \leq t_0 + a \\
&\Rightarrow \quad t_0 - a \leq \tau \leq t_0 + a \\
&\Rightarrow \quad |\tau - t_0| \leq a.
\end{aligned}$$

Por outro lado, $x \in \widetilde{C} \Rightarrow |x(\tau) - x_0| \leq c\beta < b$. Assim, $(\tau, x(\tau)) \in R$. E assim, a integral (3.13) existe pelo fato de f ser contínua em R.

(2) $\forall x \in \widetilde{C} \Rightarrow Tx \in \widetilde{C}$. De (3.9) e (3.13), obtemos,

$$\begin{aligned}
|Tx(t) - x_0| &= \left| \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))d\tau \right| \\
&\leq c\int_{t_0}^{t} d\tau \\
&\leq c\,|t - t_0| \\
&\leq c\beta.
\end{aligned}$$

Assim, $Tx \in \widetilde{C}$.

Mostremos que T é uma contração em $\widetilde{C}$. Pela condição (3.10), temos:

$$\begin{aligned}
|Tx(t) - Tv(t)| &= \left| x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))d\tau - [x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, v(\tau))]d\tau \right| \\
&\leq \int_{t_0}^{t} |f(\tau, x(\tau)) - f(\tau, v(\tau))| \, d\tau \\
&\leq \int_{t_0}^{t} k \, |x - v| \, d\tau \\
&\leq \int_{t_0}^{t} \max_{\tau \in J} k \, |x(\tau) - v(\tau)| \, d\tau \\
&\leq |t - t_0| \max_{\tau \in J} k \, |x(\tau) - v(\tau)| \\
&\leq k\beta d(x, v).
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow d(Tx, Tv) \leq \alpha d(x, v), \ \mathit{onde} \ \alpha = k\beta.$$

De (3.11) vemos que $\alpha = k\beta < 1$. Assim T é uma contração em $\widetilde{C}$. Desta maneira, temos, pelo (T.P.F.B.), que T possui um único ponto fixo $x \in \widetilde{C}$, isto é, uma função contínua x em J, satisfazendo $x = Tx$. Por (3.13), temos,

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))d\tau. \tag{3.14}$$

Visto que $(\tau, x(\tau)) \in R$, com f contínua, pelo (T.F.C.), (3.14) pode ser diferenciada. Desta forma, x é diferenciável e satisfaz (3.7). Reciprocramente, toda solução de (3.7) tem que satisfazer (3.14).

■

3.4 Aplicações em Equações Integrais

Uma equação integral da forma,

$$x(t) - \mu \int_{a}^{b} k(t, \tau)x(\tau)d\tau = v(t) \tag{3.15}$$

é chamada de **equação de Fredholm de segunda espécie**. Aqui, [a,b] é um intervalo dado, x é uma função em [a,b] e μ é um parâmetro. O núcleo K da equação é uma função dada no quadrado $G = [a, b] \times [a, b]$ e v é uma função em [a,b].

Equações integrais podem ser consideradas em vários espaços de funções. Aqui, consideraremos (3.15) em C[a,b], chamaremos J=[a,b], com a métrica d dada por:

$$d(x,y) = \max_{t \in J} |x(t) - y(t)|. \tag{3.16}$$

Teorema 3.4.1 (Equação Integral de Fredholm) *Suponha que k e v em (3.15) são contínuas em $J \times J$ e J respectivamente, e assuma que μ satisfaz $|\mu| < 1/c(b-a)$, sendo c a constante que limita a função k. Assim, (3.15) possui solução única x em J. Esta função x é o limite da sequência iterativa $(x_0, x_1, \cdots)$, onde x_0 é qualquer função contínua em J.*

<u>DEMONSTRAÇÃO:</u>

Para aplicarmos o (T.P.F.B.) é importante notar que C[a,b] é completo[1]. Sejam v e k contínuas. Então k é uma função limitada em G, pois é contínua num compacto, digamos:

$$|k(t,\tau)| \leq c, \qquad \forall\ (t,\tau) \in G. \tag{3.17}$$

Temos que, (3.15) pode ser escrita por $x = Tx$, onde:

$$Tx(t) = v(t) + \mu \int_a^b k(t,\tau)x(\tau)d\tau. \tag{3.18}$$

Visto que v e k são contínuas e $x \in C[a,b]$, (3.18) define um operador $T : C[a,b] \to C[a,b]$. Mostemos agora que T é uma contração.

[1] Veja demonstração no Exemplo (1.4.2).

De (3.16) e (3.18), temos:

$$\begin{aligned}
d(Tx,Ty) &= \max_{t\in J}|Tx(t)-Ty(t)| \\
&= \max_{t\in J}\left|v(t)+\mu\int_a^b k(t,\tau)x(\tau)d\tau-[v(t)+\mu\int_a^b k(t,\tau)y(\tau)d\tau]\right| \\
&= \max_{t\in J}\left|\mu\int_a^b k(t,\tau)[x(\tau)-y(\tau)]d\tau\right| \\
&= |\mu|\max_{t\in J}\left|\int_a^b k(t,\tau)[x(\tau)-y(\tau)]d\tau\right| \\
&\leq |\mu|\max_{t\in J}\int_a^b |k(t,\tau)|\,|x(\tau)-y(\tau)|\,d\tau \\
&\overset{(3.17)}{\leq} |\mu|\max_{t\in J}\int_a^b c\,|x(\tau)-y(\tau)|\,d\tau \\
&= |\mu|\int_a^b c\,|x(\tau)-y(\tau)|\,d\tau \\
&\leq |\mu|\,c\int_a^b \max_{\sigma\in J}|x(\sigma)-y(\sigma)|\,d\tau \\
&= |\mu|\,c\max_{\sigma\in J}|x(\sigma)-y(\sigma)|\int_a^b d\tau \\
&= |\mu|\,cd(x,y)(b-a).
\end{aligned}$$

Esta desigualdade pode ser escrita por $d(Tx,Ty)\leq \alpha d(x,y)$, onde

$$\alpha = |\mu|\,c(b-a).$$

O que resulta, pela hipótese de $|\mu| < \frac{1}{c(b-a)}$, que T é contração. Portanto, pelo (T.P.F.B), a Equação de Fredholm possui uma única solução.

■

Consideremos, agora, a equação de Volterra,

$$x(t)-\mu\int_a^t k(t,\tau)x(\tau)d\tau = v(t). \tag{3.19}$$

A diferença entre (3.15) e (3.19) é que, em (3.15) o limite de integração superior é uma constante, e em (3.19) é uma variável.

Teorema 3.4.2 (Equação Integral de Volterra) *Suponha que v em (3.19) seja contínua em [a,b] e que o núcleo k seja contínuo na região triangular R* *no plano-tτ dado por $a \leq \tau \leq t,\ a \leq t \leq b$. Então, para todo $\mu \in R$, (3.19) possui uma única solução x em [a,b].*

<u>Demonstração:</u>

Vejamos que a equação (3.19) pode ser escrita como $x = Tx$, com $T : C[a,b] \to C[a,b]$, definida por:

$$Tx(t) = v(t) + \mu \int_a^t k(t,\tau)x(\tau)d\tau \tag{3.20}$$

Visto que k é contínua em R e R é fechado e limitado, logo é compacto, então k é uma função limitada em R, digamos,

$$|k(t,\tau)| \leq c, \qquad \forall\ (t,\tau) \in R.$$

Usando (3.20), obtemos $\forall\ x, y \in C[a,b]$,

$$\begin{aligned} |Tx(t) - Ty(t)| &= |\mu| \left| \int_a^t k(t,\tau)[x(\tau) - y(\tau)]d\tau \right| \\ &\leq |\mu|\, cd(x,y) \int_a^t d\tau \\ &\leq |\mu|\, c(t-a)d(x,y). \end{aligned} \tag{3.21}$$

Obtivemos esta desigualdade de maneira análoga à demonstração do Teorema da equação integral de Fredholm.

Mostremos, por indução, que:

$$|T^m x(t) - T^m y(t)| \leq |\mu|^m\, c^m \frac{(t-a)^m}{m!} d(x,y). \tag{3.22}$$

De fato,

para m=1, vale por (3.21).

Suponhamos que (3.22) valha para um certo m natural. Mostremos que, também, vale para m+1.

De fato,

$$
\begin{aligned}
\left|T^{m+1}x(t) - T^{m+1}y(t)\right| &= \left|T(T^m x(t)) - T(T^m y(t))\right| \\
&= \left|v(t) + \mu \int_a^t k(t,\tau) T^m x(\tau) d\tau - [v(t) + \mu \int_a^t k(t,\tau) T^m y(\tau) d\tau]\right| \\
&= |\mu| \left| \int_a^t k(t,\tau)[T^m x(\tau) - T^m y(\tau)] d\tau \right| \\
&\leq |\mu| \int_a^t |k(t,\tau)| \left|T^m x(\tau) - T^m y(\tau)\right| d\tau \\
&\overset{(3.22)}{\leq} |\mu| \int_a^t c\, |\mu|^m c^m \frac{(\tau - a)^m}{m!} d(x,y) d\tau \\
&\leq c^{m+1} |\mu|^{m+1} \frac{d(x,y)}{m!} \int_a^t (\tau - a)^m d\tau \\
&\leq c^{m+1} |\mu|^{m+1} \frac{d(x,y)}{m!} \frac{(t-a)^{m+1}}{m+1} \\
&\leq |\mu|^{m+1} c^{m+1} \frac{(t-a)^{m+1}}{(m+1)!} d(x,y).
\end{aligned}
$$

O que completa a indutividade de (3.22).

Tomando o máximo à esquerda de (3.22), para $t \in J$, e usando o fato de $t - a \leq b - a$, obtemos:

$$d(T^m x, T^m y) \leq \alpha_m d(x,y)$$

onde

$$\alpha_m = |\mu|^m c^m \frac{(b-a)^m}{m!}.$$

Para qualquer μ fixo e m suficientemente grande, temos $\alpha_m < 1$, pois o crescimento de $m!$ é maior que o de $(|\mu|\, c(b-a))^m$, quando $m \to \infty$. Desta forma, T^m é uma contração em C[a,b] e, pelo Lema (2.3.1), T possui um único ponto fixo.

■

Referências Bibliográficas

[1] BARATA, João Carlos Alves. *Curso de Física-Matemática, Versão de 15 de maio de 2008*. Departamento de Física Matemática USP. Disponível em : denebola.if.usp.br/ jbarata/Notas de aula/notas de aula.html.

[2] CHAIM, Samuel Hönig. *Aplicações da Topologia à Análise*. Rio de Janeiro: IMPA, Projeto Euclides, 1976.

[3] DOMINGUES, Higino Hugueros. *Espaços Métricos e Introdução à Topologia*. São Paulo: Atual, 1982.

[4] KREYSZIG, Erwin. *Introductory Functional Analysis With Applications*. United States of America: Wiley Classics Library, 1978.

[5] LIMA, Elon Lages. *Análise Real, Volume 1*. Rio de Janeiro: IMPA; CNPq, 1989.

Resultados Utilizados

Aqui, apresentamos alguns resultados que utilizamos em nosso trabalho, dos quais não atentamos em fazer suas demonstrações.

Teorema 3.4.3 (Conjunto Fechado) *Um subconjunto M de um espaço métrico X é fechado se, e só, se $M = \overline{M}$.*

Definição 3.4.1 (Conjunto Compacto) *Seja (X,d) um espaço métrico. Diz-se que $M \subset X$ é compacto se, para toda sequência x_n em M, existe uma subsequência x_{nj} que converge para um ponto de M.*

Proposição 3.4.1 (Conjunto Compacto) *Em espaços métricos de dimensão finita, um conjunto é compacto se, e só se, é fechado e limitado.*

Teorema 3.4.4 (Teorema de Weierstrass) *Se $f : M \to R$ é contínua e $M \subset X$ é compacto, então f admite um valor máximo e um valor mínimo.*

Definição 3.4.2 (Convergência Uniforme) *Diz-se que uma sequência de funções $f_n : X \to R$ converge uniformemente para uma função $f : X \to R$ quando, $\forall \epsilon > 0,\ \exists n_0 \in N,\ tal\ que\ \forall n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon,\ \forall x \in X.$*

Teorema 3.4.5 (Convergência Uniforme) *Se uma sequência de funções $f_n : X \to R$ converge uniformemente para $f : X \to R$ e cada f_n é contínua no ponto $a \in X$, então f é contínua no ponto a.*

Teorema 3.4.6 (Teorema de Bolzano-Weierstrass) *Toda sequência limitada de números reais possui uma subsequência convergente.*

Teorema 3.4.7 (Teorema Fundamental do Cálculo) *Seja $f : I \to R$ contínua no intervalo I. As seguintes afirmações a respeito de uma função $F : I \to R$ são equivalentes:*

1. $F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)dt, \ \forall x \in I.$

2. *F é uma primitiva de f, isto é,* $F'(x) = f(x), \ \forall x \in I.$

Proposição 3.4.2 (Derivada Limitada) *Seja $f : I \to R$ derivável no intervalo aberto I. Se existe $k \in R$, tal que $|f'(x)| \leq k, \ \forall x \in I$, então, quaisquer que sejam $x, y \in I$, tem-se $|f(x) - f(y)| \leq k\,|x - y|$.*